

**3278.**  $x_1 = \frac{5 \cdot \pi}{12} + k \cdot \pi$ ;  $x_2 = \frac{\pi}{12} + l \cdot \pi$ . Alkalmazzuk a tangensre való összegzési képletet, majd kapunk egy egyenletet  $\operatorname{tg} x$ -re. Szorozzunk be a nevezővel és  $\operatorname{tg} x$ -re egy másodfokú egyenletet kapunk, amelyet oldjunk meg.

**3279.**  $x_1 \approx 1,1503 + k \cdot \pi$ ;  $x_2 \approx -1,1503 + l \cdot \pi$ . A  $\operatorname{tg} 2x$ -et fejezzük ki  $\operatorname{tg} x$ -szel, majd szorozzunk a nevezővel. Rendezés után alakítsuk szorzattá az egyenletet!

**3280.** a)  $x = \frac{\pi}{6} + k \cdot \pi$ . Alkalmazzuk a megfelelő összegzési tételt a bal oldalon, majd helyettesítsük be a megfelelő nevezetes hegyesszögek szögfüggvényeinek értékeit, ezután osszuk  $\cos x$ -szel, amikor ez nem nulla. Mutassuk meg, hogy  $\cos x$  nem lehet nulla. b)  $x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi$ . Hasonló módon járjunk el, mint az előző feladatnál! c)  $x = \frac{\pi}{6} + k \cdot \pi$ . Hasonló módon járjunk el, mint az előző két feladatnál! d)  $x_1 = k \cdot \pi$ ;  $x_2 = \frac{\pi}{4} + l \cdot 2 \cdot \pi$ ;  $x_3 = -\frac{\pi}{4} + m \cdot 2 \cdot \pi$ . Hasonlóan kezdjük el, mint az előzőeket, majd rendezzük nullára és alakítsuk szorzattá! e)  $x_1 = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$ ;

$x_2 = \frac{\pi}{6} + l \cdot 2 \cdot \pi$ ;  $x_3 = \frac{5 \cdot \pi}{6} + m \cdot 2 \cdot \pi$ . Hasonlóan járjunk el, mint az előző feladatnál. f)  $x_1 = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$ ;  $x_2 = \frac{\pi}{3} + l \cdot 2 \cdot \pi$ ;  $x_3 = -\frac{\pi}{3} + m \cdot 2 \cdot \pi$ . Hasonlóan oldhatjuk meg, mint az előző két feladatot.

**3281.** a)  $x \approx 0,2318 + k \cdot \frac{\pi}{2}$ . Vegyük figyelembe, hogy  $\sin 4x = 2 \cdot \sin 2x \cdot \cos 2x$ , másrészt  $\sin^2 2x + \cos^2 2x = 1$ , a kapott egyenletet osszuk el  $\cos^2 2x$ -szel, amikor ez nem nulla! Ekkor  $\operatorname{tg} 2x$ -re kapunk egy másodfokú egyenletet, amelyet oldjunk meg! Mutassuk meg, hogy  $\cos 2x$  nem lehet nulla! b)  $x_1 \approx -0,0477 + k \cdot \frac{2 \cdot \pi}{5}$ ;  $x_2 \approx 0,6760 + k \cdot \frac{2 \cdot \pi}{5}$ . Hasonló módon kezdhettek megoldani, mint az előző egyenletet. Kapunk  $\sin 5x$ -re egy másodfokú egyenletet, ha  $\cos^2 5x = 1 - \sin^2 5x$ -et figyelembe vesszük.

**3282.** a)  $x_1 = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi$ ;  $x_2 = \frac{2 \cdot \pi}{3} + l \cdot 2 \cdot \pi$ ;  $x_3 = -\frac{2 \cdot \pi}{3} + m \cdot 2 \cdot \pi$ . Használjuk fel  $\cos 2x$  képletét és a  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$  azonosságot! Ezután alakítsunk szorzattá!

$2 \cdot \cos x \cdot (\sin x - \cos x) + (\sin x - \cos x) = 0$ . Folytassuk! b)  $x_1 = k \cdot 2 \cdot \pi$ ;  $x_2 = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi$ .

Alkalmazzuk  $\sin 2x$  képletét, majd alakítsunk szorzattá!

$2 \cdot \sin x \cdot \cos x \cdot (1 - \cos x) - (1 - \cos x) = 0$ . Folytassuk!

**3283.** a)  $x_1 = k \cdot 2 \cdot \pi$ ;  $x_2 = \frac{\pi}{2} + l \cdot 2 \cdot \pi$ ;  $\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sin x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ,  $\cos \frac{\pi}{4} \cdot \sin x + \sin \frac{\pi}{4} \cdot \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ,  $\sin \left( x + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ . b)  $x_1 = k \cdot \pi$ ;  $x_2 = \frac{\pi}{4} + l \cdot \pi$ . Hasonlóan oldhatjuk meg, mint az előző feladatot. c)  $x_1 = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2 \cdot \pi$ ;  $x_2 = \frac{\pi}{2} + l \cdot 2 \cdot \pi$ . Hasonlóan oldhatjuk meg, mint az előző két feladatot, csak itt 2-vel osszuk el az egyenletet! d)  $x_1 = k \cdot \pi$ ;

$x_2 = \frac{\pi}{6} + l \cdot \pi$ . Hasonlóan oldhatjuk meg, mint az előző feladatot. e)  $x_1 = -\frac{\pi}{12} + k \cdot \pi$ ;

$x_2 = -\frac{\pi}{4} + l \cdot \pi$ . Hasonlóan oldhatjuk meg, mint az előző két feladatot. f)  $x_1 = \frac{\pi}{24} + k \cdot \pi$ ;  
 $x_2 = \frac{7 \cdot \pi}{24} + l \cdot \pi$ . Hasonlóan oldhatjuk meg, mint az előző két feladatot. g)  $x_1 = k \cdot \frac{\pi}{2}$ ;  
 $x_2 \approx 0,5536 + l \cdot \frac{\pi}{2}$ . Hasonlóan oldhatjuk meg, mint az előző feladatokat, csak itt  $\sqrt{5}$ -tel osszuk el az egyenletet!

## IV

**3284.** a)  $x_1 \approx 2,6516 + k \cdot 2 \cdot \pi$ ;  $x_2 = -\frac{\pi}{2} + l \cdot 2 \cdot \pi$ . Hasonlóan oldhatjuk meg, mint az előző feladatokat, csak itt  $\sqrt{34}$ -gyel osszuk el az egyenletet! b)  $x_1 = k \cdot 2 \cdot \pi$ ;  $x_2 \approx 1,9656 + l \cdot 2 \cdot \pi$ .  $\sqrt{13}$ -mal osszuk el az egyenletet! c)  $x_1 = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2 \cdot \pi$ ;  $x_2 = \pi + l \cdot 2 \cdot \pi$ . Alkalmazzuk a tangens definícióját, majd szorozzunk a nevezőkkel, ezután pedig osszuk az egyenletet 2-vel!

**3285.**  $x_1 = \frac{\pi}{6} + k \cdot \pi$ ;  $x_2 = \frac{\pi}{12} + l \cdot \frac{\pi}{4}$ . Az egyenlet bal oldala egyenlő  $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ -mal.

**3286.**  $x_1 = -\frac{\pi}{32} + k \cdot \frac{\pi}{4}$ ;  $x_2 = \frac{\pi}{72} + l \cdot \frac{\pi}{9}$ . Osszuk az egyenletet  $\sqrt{2}$ -vel! Ezután vegyük észre, hogy a kapott egyenlet bal oldala egyenlő  $\sin\left(5x + \frac{\pi}{4}\right)$ -gyel! Ez pedig tovább egyenlő  $\cos\left(5x + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right)$ -vel.

**3287.**  $x_1 = \frac{\pi}{4} + k \cdot 2 \cdot \pi$ ;  $x_2 = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{2 \cdot \pi}{3}$ . Szorozzunk a nevezőkkel, majd osszuk az egyenletet  $\sqrt{2}$ -vel! Vegyük észre, hogy a kapott egyenlet bal oldala éppen  $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ !

**3288.**  $x_1 = -\frac{\pi}{12} + k \cdot \frac{\pi}{10}$ ;  $x_2 = \frac{5 \cdot \pi}{24} + l \cdot \frac{\pi}{4}$ . Adjunk az egyenlet mindkét oldalához  $2 \cdot \cos 14x$ -et! Majd vegyük észre, hogy a kapott egyenlet bal oldala éppen  $\sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right)$ -nak a négyzete! Erről pedig gondoljuk meg, hogy éppen egyenlő a következő kifejezéssel:

$$\frac{1 - \cos\left(2 \cdot \left(3x + \frac{\pi}{3}\right)\right)}{2}.$$

## Összetettebb, illetve nehezebb trigonometrikus egyenletek

**3289.**  $x_1 = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$ ;  $x_2 = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2}$ ;  $x_3 = \frac{\pi}{10} + k \cdot \frac{2 \cdot \pi}{5}$ ;  $x_4 = -\frac{\pi}{6} + l \cdot \frac{2 \cdot \pi}{3}$ . Alkalmazzuk a tangens definícióját, másrészt vegyük figyelembe, hogy  $\sin 4x = 2 \cdot \sin 2x \cdot \cos 2x$ ! Harmadrészt a koszinuszok összegére vonatkozó azonosság segítségével alakítsuk szorzattá az egyenlet bal oldalát:  $\cos x + \cos 3x = 2 \cdot \cos x \cdot \cos 2x$ . Ezután rendezzük nullára az egyenletet, majd alakítsuk szorzattá!

**3290.**  $x_1 = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$ ;  $x_2 \approx 0,6847 + k \cdot 2 \cdot \pi$ ;  $x_3 \approx -0,6847 + l \cdot 2 \cdot \pi$ ;  $x_4 \approx 2,4569 + m \cdot 2 \cdot \pi$ ;  $x_5 \approx -2,4569 + n \cdot 2 \cdot \pi$ . Használjuk fel, hogy  $\cos 3x = 4 \cdot \cos^3 x - 3 \cdot \cos x$ . Ezt helyettesítsük be, majd rendezzük nullára az egyenletet és ezután alakítsuk szorzattá!

**3291.**  $x_1 = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2 \cdot \pi$ ;  $x_2 = -\frac{\pi}{2} + l \cdot 2 \cdot \pi$ ;  $x_3 = \frac{\pi}{6} + m \cdot 2 \cdot \pi$ ;  $x_4 = \frac{5 \cdot \pi}{6} + n \cdot 2 \cdot \pi$ .

Használjuk fel, hogy  $\sin 3x = 3 \cdot \sin x - 4 \cdot \sin^3 x$  és  $\cos 2x = 1 - 2 \cdot \sin^2 x$ ! Ezeket helyettesítsük be, majd rendezzük nullára az egyenletet és ezután alakítsuk szorzattá!

$\sin^2 x \cdot (2 \cdot \sin x - 1) - (2 \cdot \sin x - 1) = 0$ . Folytassuk!

**3292.**  $x_1 = \frac{\pi}{3} + k \cdot \pi$ ;  $x_2 = -\frac{\pi}{3} + l \cdot \pi$ . Alkalmazzuk a kotangens és a tangens definícióját,

majd szorozzunk a nevezőkkel! Alkalmazzuk visszafelé a kétszeres szögek megfelelő szögfüggvényeire vonatkozó képleteket! Ezután alakítsuk át az egyenletet úgy, hogy csak  $\cos 2x$  legyen benne a szögfüggvény, erre kapunk egy másodfokú egyenletet, amelyet oldjunk meg.

**3293.**  $x = \frac{\pi}{4} + k \cdot 2 \cdot \pi$ . Osszuk az egyenletet  $\sqrt{2}$ -vel, majd a kapott egyenletről vegyük

észre, hogy a bal oldala éppen  $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ ! Vegyük figyelembe, hogy a kapott egyenlet bal

oldala nem nagyobb 1-nél, míg a jobb oldala nem kisebb 1-nél. Ebből következik, hogy az egyenlet csak akkor állhat fenn, ha mindegyik oldala külön-külön 1-gyel egyenlő.

**3294.**  $x_1 = -\frac{\pi}{4} + k \cdot \pi$ ;  $x_2 = l \cdot 2 \cdot \pi$ ;  $x_3 = \frac{\pi}{2} + m \cdot 2 \cdot \pi$ . Vegyük figyelembe, hogy

$1 = \sin^2 x + \cos^2 x$  és alkalmazzuk  $\sin 2x$  képletét! Ekkor észrevehetjük, hogy az egyenlet bal oldala éppen  $\sin x + \cos x$  négyzete. Rendezzük nullára az egyenletet, majd alakítsuk szorzattá!

**3295.**  $x_1 = \frac{\pi}{6} + k \cdot \pi$ ;  $x_2 = \frac{\pi}{3} + l \cdot \pi$ ;  $x_3 = -\frac{\pi}{6} + m \cdot \pi$ ;  $x_4 = \frac{2 \cdot \pi}{3} + n \cdot \pi$ . A bal oldalon hozzunk közös nevezőre, majd vegyük észre, hogy a kapott számláló értéke 1! Míg a kapott nevező éppen  $\sin 2x$  fele.

**3296.**  $x_1 = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2 \cdot \pi$ ;  $x_2 = \pi + l \cdot 2 \cdot \pi$ . Alakítsuk szorzattá a bal oldalt még jobban! A jobb

oldalon végezzük el a négyzetre emelést és használjuk fel, hogy  $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$ ! Majd a kapott egyenletet rendezzük nullára és alakítsuk szorzattá!

**3297.**  $x_1 = \frac{\pi}{10} + k \cdot 2 \cdot \pi$ ;  $x_2 = \frac{9 \cdot \pi}{10} + l \cdot 2 \cdot \pi$ ;  $x_3 = -\frac{\pi}{10} + m \cdot 2 \cdot \pi$ ;  $x_4 = \frac{11 \cdot \pi}{10} + n \cdot 2 \cdot \pi$ .

Különböztessünk meg két esetet, az 1. esetben  $\sin x \geq 0$ , míg a 2. esetben  $\sin x < 0$ .

**3298.**  $x_1 = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi$ . Mutassuk meg először, hogy  $\sin 2x = \frac{2 \cdot \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$ . Ezután ezt helyettesít-

sük be az egyenletbe, majd szorozzunk a nevezővel! Ekkor kapunk  $\operatorname{tg} x$ -re egy harmadfokú egyenletet. Azt alakítsuk szorzattá a következő módon:  $\operatorname{tg}^3 x - 2 \cdot \operatorname{tg}^2 x + 3 \cdot \operatorname{tg} x - 2 = 0$ ,

$(\operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg}^2 x) - (\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x) + 2 \cdot (\operatorname{tg} x - 1) = 0$ . Folytassuk!

**3299.**  $x_1 = k \cdot 2 \cdot \pi$ ;  $x_2 = \frac{\pi}{2} + l \cdot 2 \cdot \pi$ ;  $x_3 \approx 0,6435 + m \cdot 2 \cdot \pi$ ;  $x_4 \approx 0,9273 + n \cdot 2 \cdot \pi$ .

Vezessünk be új változót:  $y = \sin x + \cos x$ . Ekkor  $y$ -ra egy másodfokú egyenletet kapunk, amelyet oldjunk meg! Utána a szokott módon megoldhatjuk a kapott két részegyenletet, ha mind-egyiket osztjuk  $\sqrt{2}$ -vel.

$$\mathbf{3300.} \quad x_1 = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2 \cdot \pi; \quad x_2 = -\frac{\pi}{2} + l \cdot 2 \cdot \pi; \quad x_3 = \frac{\pi}{6} + m \cdot 2 \cdot \pi; \quad x_4 = \frac{5 \cdot \pi}{6} + n \cdot 2 \cdot \pi.$$

Használjuk fel, hogy  $\sin 3x = 3 \cdot \sin x \cdot \cos^2 x - \sin^3 x$  és  $\cos 2x = 1 - 2 \cdot \sin^2 x$ . Ezeket helyettesítsük be és rendezzük nullára az egyenletet, majd alakítsuk szorzattá!

$$(2 \cdot \sin x - 2 \cdot \sin^3 x) - (1 - \sin^2 x) = 0. \text{ Folytassuk!}$$

$$\mathbf{3301.} \quad x_1 = -\frac{\pi}{6} + k \cdot \frac{\pi}{2}; \quad x_2 = \frac{\pi}{3} + l \cdot \pi. \text{ Osszuk el az egyenletet 2-vel! A bal oldalon levő}$$

IV

második és harmadik tag összege éppen  $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ . Így  $\cos 3x = -\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ ,

$$\cos 3x = \sin\left(-x - \frac{\pi}{6}\right), \quad \cos 3x = \cos\left(-x - \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2}\right).$$

$$\mathbf{3302.} \quad x_1 = k \cdot \frac{\pi}{2}; \quad x_2 = \frac{\pi}{2} + l \cdot \pi; \quad x_3 = \frac{\pi}{2} + m \cdot 2 \cdot \pi. \text{ Összefoglalva a megoldásokat:}$$

$$x = n \cdot \frac{\pi}{2}. \text{ Használjuk fel, hogy } \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x \text{ és } 1 - \cos^2 2x = \sin^2 2x. \text{ Alakítsuk át}$$

ezután a szinuszok összegére vonatkozó tétellel az egyenlet jobb oldalát:  $\sin 3x + \sin x = 2 \cdot \sin 2x \cdot \cos x$ . Majd rendezzük nullára az egyenletet és alakítsuk szorzattá!

$$\mathbf{3303.} \quad x_1 = k \cdot \pi; \quad x_2 = \frac{\pi}{6} + l \cdot 2 \cdot \pi; \quad x_3 = -\frac{\pi}{6} + m \cdot 2 \cdot \pi; \quad x_4 = \frac{5 \cdot \pi}{6} + n \cdot 2 \cdot \pi;$$

$$x_5 = -\frac{5 \cdot \pi}{6} + p \cdot 2 \cdot \pi. \text{ Alkalmazzuk a tangens definícióját, másrészt } \sin 4x = 2 \cdot \sin 2x \cdot \cos 2x = 4 \cdot \sin x \cdot \cos x \cdot (2 \cdot \cos^2 x - 1). \text{ Szorozzunk a nevezővel, majd rendezzük nullára az egyenletet és alakítsuk szorzattá!}$$

$$\mathbf{3304.} \quad x_1 \approx 0,4240 + k \cdot 2 \cdot \pi; \quad x_2 \approx 1,9948 + l \cdot 2 \cdot \pi; \quad x_3 \approx 0,4240 + m \cdot 2 \cdot \pi;$$

$$x_4 \approx 4,2884 + n \cdot 2 \cdot \pi. \mathbf{1. eset:} \quad \pi \cdot \cos x = \frac{\pi}{2} - \pi \cdot \sin x + p \cdot 2 \cdot \pi, \text{ ebből } \sin x + \cos x = \frac{1}{2} + 2 \cdot p.$$

Osszuk ezt az egyenletet  $\sqrt{2}$ -vel és gondoljuk meg, hogy csak  $p = 0$  lehet. Kapjuk, hogy

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}. \text{ Folytassuk! A } \mathbf{2. esetben:} \quad \pi \cdot \cos x = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - \pi \cdot \sin x\right) + q \cdot 2 \cdot \pi. \text{ Ha-}$$

sonlóan folytathatjuk, mint az 1. esetnél.

$$\mathbf{3305.} \quad x_1 = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi; \quad x_2 = 2. \text{ Az egyenlet a következőre vezet:}$$

$$|3x - 5| \cdot \cos x = (1 - x) \cdot |\cos x|. \text{ Alkalmazzuk az esetek szétválasztását! } \mathbf{1. eset:} \quad \cos x = 0.$$

$$\mathbf{2. eset:} \quad \cos x > 0. \mathbf{3. eset:} \quad \cos x < 0.$$

$$\mathbf{3306.} \quad x_1 = -\frac{\pi}{66} + k \cdot \frac{\pi}{11}; \quad x_2 = \frac{\pi}{9} + l \cdot \frac{\pi}{6}. \text{ Osszuk el az egyenletet 2-vel! Az így kapott}$$

$$\text{egyenlet második és harmadik tagjának összege } \sin\left(5x + \frac{\pi}{3}\right); \quad \sin 17x + \sin\left(5x + \frac{\pi}{3}\right) = 0;$$

$$\sin 17x = -\sin\left(5x + \frac{\pi}{3}\right); \quad \sin 17x = \sin\left(-5x - \frac{\pi}{3}\right).$$

**3307.**  $x_1 = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2}$ ;  $x_2 = \frac{\pi}{6} + l \cdot 2 \cdot \pi$ ;  $x_3 = \frac{5 \cdot \pi}{6} + m \cdot 2 \cdot \pi$ . Alkalmazzuk a tangens és a kotangens definícióját! Hozzunk közös nevezőre a bal oldal számlálójában, majd alkalmazzuk visszafelé a  $\cos 2x$  képletét! Ezután szorozzunk  $(\sin x \cdot \cos x)$ -szel, majd rendezzük nullára az egyenletet, ezután pedig alakítsuk szorzattá!

**3308.**  $x = 2 \cdot \pi + k \cdot 24 \cdot \pi$ . Gondoljuk meg, hogy az egyenlet bal oldala nem nagyobb, mint 3. Ezért pontosan akkor teljesülhet az egyenlet, amikor az  $\sin \frac{x}{4} = 1$  és  $\cos \left( \frac{x - 2 \cdot \pi}{3} \right) = 1$ .

**3309.**  $x_1 = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2 \cdot \pi$ ;  $x_2 = \frac{7 \cdot \pi}{6} + l \cdot 2 \cdot \pi$ . Összefoglalva:  $x = \frac{\pi}{6} + m \cdot \pi$ . Osszuk el az egyenletet 2-vel!  $\left( \frac{1}{2} \cdot \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos x \right) \cdot \sin 3x = 1$ ,  $\sin \left( x + \frac{\pi}{3} \right) \cdot \sin 3x = 1$ . Gondoljuk meg,

hogy ez pontosan akkor lehet, ha mindkettő tényező 1-gyel egyenlő, vagy ha mindkét tényező  $(-1)$ -gyel egyenlő!

**3310.**  $x_1 = k \cdot 2 \cdot \pi$ ;  $x_2 = \frac{\pi}{2} + l \cdot 2 \cdot \pi$ . Adjunk mindkét oldalhoz 1-et, majd alakítsuk szorzattá a bal oldalt!  $(\sin x + 1)(\cos x + 1) = 2$ . Gondoljuk meg, hogy ez pontosan akkor lehet, ha az első tényező 1 és a második tényező 2, illetve fordítva! Miért nem lehetnek negatívak a tényezők?

**3311.**  $x_1 = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$ ;  $x_2 \approx -0,9117 + l \cdot \pi$ ;  $x_3 \approx -0,9117 + m \cdot \pi$ . Használjuk fel, hogy  $\cos 3x = 4 \cdot \cos^3 x - 3 \cdot \cos x$ ,  $\cos 6x = 4 \cdot \cos^3 2x - 3 \cdot \cos 2x$  és

$\cos^6 x = (\cos^2 x)^3 = \left( \frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^3$ . Helyettesítsük be ezeket az egyenletbe, rendezzük az egyen-

letet és  $\cos 2x$ -re egy másodfokú egyenletet kapunk.  $4 \cdot \cos^2 2x + 5 \cdot \cos 2x + 1 = 0$ .

**3312.**  $(k; 0)$  és  $(k; 2)$  ahol  $k$  tetszőleges egész szám. Gondoljuk meg, hogy az egyenlet akkor és csak akkor állhat fenn, ha:  $\sin(\pi \cdot x) = 0$  és  $\log_2(y^2 - 2y + 1) = 0$ !

**3313.**  $x = -\frac{\pi}{6} + k \cdot \frac{\pi}{2}$  és  $y = \frac{\pi}{6} + l \cdot \frac{\pi}{4}$ . Gondoljuk meg, hogy az egyenlet akkor és csak akkor teljesülhet, ha  $\operatorname{tg} 2x + \sqrt{3} = 0$  és  $\operatorname{ctg} \left( 4y - \frac{\pi}{6} \right) = 0$ .

**3314.**  $x_1 = \frac{1}{2} + k$ ;  $x_2 = \frac{1}{8}$ . Az egyenletből a következő egyenlet következik:

$8 \cdot x^2 \cdot \operatorname{ctg}(\pi \cdot x) + 15 \cdot x \cdot \operatorname{ctg}(\pi \cdot x) = 2 \cdot \operatorname{ctg}(\pi \cdot x)$ . Ezt rendezzük nullára és alakítsuk szorzattá!

**3315.**  $x_1 = \frac{\pi}{8} + k \cdot \pi$ ;  $x_2 = -\frac{\pi}{8} + l \cdot \pi$ ;  $x_3 = \frac{3 \cdot \pi}{8} + m \cdot \pi$ ;  $x_4 = -\frac{3 \cdot \pi}{8} + n \cdot \pi$ . Használjuk fel, hogy  $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$  és  $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$  és ezeket helyettesítsük be az egyen-

letbe! Végezzük el az ötödik hatványra való emelést például a binomiális tétellel, rendezzük az egyenletet és kapjuk, hogy:  $0 = 24 \cdot \cos^4 2x - 10 \cdot \cos^2 2x - 1$ . Ezt másodfokú egyenletre vezethetjük vissza.

## IV

**3316.** a)  $x_1 = \frac{\pi}{12} + k \cdot \pi$ ;  $x_2 = -\frac{3 \cdot \pi}{4} + l \cdot \pi$ . Alkalmazzuk a

$\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} \cdot (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$  azonosságot! b)  $x_1 = -\frac{\pi}{12} + k \cdot \pi$ ;

$x_2 = -\frac{\pi}{4} + l \cdot \pi$ . Alkalmazzuk a  $\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} \cdot (\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))$  azonosságot!

c)  $x_1 = -\frac{\pi}{12} + k \cdot \frac{\pi}{2}$ . Alkalmazzuk a  $\sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} \cdot (\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta))$  azonossá-

got! d)  $x_1 = -\frac{\pi}{12} + k \cdot \pi$ ;  $x_2 = \frac{7 \cdot \pi}{12} + l \cdot \pi$ . Alkalmazzuk a  $\cos \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} \cdot$

$(\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta))$  azonosságot! e)  $x = k \cdot \pi$ . Alkalmazzuk a tangens definícióját, majd alkalmazzuk a következő két azonosságot:  $\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} \cdot (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$ ,

$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} \cdot (\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))$ .

**3317.** a)  $x_1 = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$ ;  $x_2 = -\frac{\pi}{10} + l \cdot \frac{2 \cdot \pi}{5}$ ;  $x_3 = \frac{\pi}{14} + m \cdot \frac{2 \cdot \pi}{7}$ . Alkalmazzuk a

$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$  azonosságot! Rendezzük nullára az egyenletet és

alakítsuk szorzattá! b)  $x_1 = k \cdot 2 \cdot \pi$ ;  $x_2 = -\frac{\pi}{6} + l \cdot \frac{2 \cdot \pi}{3}$ . Alakítsuk szorzattá az egyenlet bal oldalát, a jobb oldalát, majd rendezzük nullára az egyenletet és alakítsuk szorzattá!

c)  $x_1 = \frac{\pi}{10} + k \cdot \frac{2 \cdot \pi}{10}$ ;  $x_2 = l \cdot 2 \cdot \pi$ ;  $x_3 = m \cdot \frac{2 \cdot \pi}{5}$ . Az egyenlet mindkét oldalát alakítsuk szorzattá, majd rendezzük nullára az egyenletet és alakítsuk szorzattá!

**3318.** a)  $x_1 = k \cdot \frac{\pi}{13}$ ;  $x_2 = l \cdot \pi$ . Alkalmazzuk a

$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} \cdot (\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))$  azonosságot! Majd ezután a koszinuszok különbségének szorzattá alakítására való azonosságot. b)  $x_1 = k \cdot \frac{2 \cdot \pi}{10}$ ;  $x_2 = \frac{\pi}{22} + l \cdot \frac{\pi}{11}$ . Alkal-

mazzuk mindkét oldalra a  $\sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} \cdot (\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta))$  azonosságot!

**3319.**  $x_1 = k \cdot \frac{\pi}{3}$ ;  $x_2 = \frac{\pi}{12} + l \cdot \frac{\pi}{2}$ ;  $x_3 = -\frac{\pi}{12} + m \cdot \frac{\pi}{2}$ . Alkalmazzuk az egyenlet bal oldalára a  $\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$  azonosságot! Majd rendezzük nullára az

egyenletet és alakítsuk szorzattá!

**3320.**  $x_1 = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2}$ ;  $x_2 = \frac{\pi}{18} + l \cdot \frac{2 \cdot \pi}{3}$ ;  $x_3 = \frac{5 \cdot \pi}{18} + m \cdot \frac{2 \cdot \pi}{3}$ . Alkalmazzuk az első

két tagra szinuszos összegének szorzattá alakítására való azonosságot! Majd vegyük figyelembe, hogy  $2 \cdot \sin^2 x = 1 - \cos 2x$ . Ezután rendezzük az egyenletet, majd alakítsuk szorzattá!

**3321.**  $x_1 = k \cdot \frac{\pi}{2}$ ;  $x_2 = \frac{2 \cdot \pi}{3} + l \cdot 2 \cdot \pi$ ;  $x_3 = -\frac{2 \cdot \pi}{3} + m \cdot 2 \cdot \pi$ . Az egyenlet első két tagja által alkotott összeget alakítsuk szorzattá! Ezután az egész egyenletet szorzattá alakíthatjuk.

**3322.**  $x_1 = \frac{2 \cdot \pi}{3} + k \cdot 2 \cdot \pi$ ;  $x_2 = -\frac{2 \cdot \pi}{3} + l \cdot 2 \cdot \pi$ ;  $x_3 = \frac{\pi}{2} + m \cdot \pi$ ;  $x_4 = \frac{\pi}{6} + n \cdot \pi$ ;  
 $x_5 = \frac{5 \cdot \pi}{6} + p \cdot \pi$ ;  $(\sin 3x + \sin x) + \sin 2x = \cos x + (1 + \cos 2x)$ ,

$2 \cdot \sin 2x \cdot \cos x + \sin 2x = \cos x + 2 \cdot \cos^2 x$ . Mindkét oldalt alakítsuk szorzattá, majd rendezzük nullára az egyenletet és alakítsuk szorzattá!

**3323.**  $x_1 = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$ ;  $x_2 = l \cdot \frac{2 \cdot \pi}{5}$ ;  $x_3 = \pi + m \cdot 2 \cdot \pi$ .

$(\sin 3x + \sin x) + (\sin 4x + \sin 2x) = 0$ . Majd mindkét zárójeles kifejezést alakítsuk szorzattá! Ezután az egész egyenletet szorzattá alakíthatjuk.

**3324.**  $x_1 = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$ ;  $x_2 = \frac{\pi}{5} + l \cdot \frac{2 \cdot \pi}{5}$ ;  $x_3 = \pi + m \cdot 2 \cdot \pi$ .

$(\cos 3x + \cos x) + (\cos 4x + \cos 2x) = 0$ . Mindkét zárójeles kifejezést alakítsuk szorzattá! Ezután az egész egyenletet szorzattá alakíthatjuk.

**3325.**  $x_1 = k \cdot \pi$ ;  $x_2 = l \cdot \frac{\pi}{2}$ . Az egyenlet bal oldalát alakítsuk szorzattá!

**3326.**  $x_1 = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$ ;  $x_2 = \frac{\pi}{12} + l \cdot \frac{\pi}{3}$ ;  $(\sin 4x + \sin 2x) - (\cos 4x + \cos 2x) = 0$ . Mindkét zárójeles kifejezést alakítsuk szorzattá! Ezután az egyenletet is szorzattá alakíthatjuk.

**3327.** a)  $x_1 = \frac{\pi}{3} + k \cdot \frac{4 \cdot \pi}{3}$ ;  $x_2 = \frac{\pi}{10} + l \cdot \frac{2 \cdot \pi}{5}$ ;  $(\sin 4x + \sin x) - (\cos 4x + \cos x) = 0$ . Hasonlóan oldhatjuk meg, mint az előző két feladatot. b)  $x_1 = \frac{\pi}{3} + k \cdot \frac{2 \cdot \pi}{3}$ ;  $x_2 = -\frac{\pi}{10} + l \cdot \frac{2 \cdot \pi}{5}$ .

$(\sin 4x + \sin x) + (\cos 4x + \cos x) = 0$ . c)  $x_1 = \pi + k \cdot 2 \cdot \pi$ ;  $x_2 = \frac{\pi}{6} + l \cdot \frac{2 \cdot \pi}{3}$ .

$(\sin 2x + \sin x) - (\cos 2x + \cos x) = 0$ .

**3328.**  $x_1 = -\frac{\pi}{4} + k \cdot \pi$ . Alkalmazzuk a  $\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} \cdot (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$  és a  $\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} \cdot (\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))$  azonosságokat!

**3329.** a)  $x_1 \approx 0,2052 + k \cdot \frac{\pi}{3}$ ;  $x_2 \approx -0,2052 + l \cdot \frac{\pi}{3}$ . Alkalmazzuk a

$\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} \cdot (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$  azonosságot! A jobb oldalon végezzük el a kö-

vetkező átalakítást:  $3 \cdot \sin^2 4x - 1 = 2 - 3 \cdot \cos^2 4x = 2 - 3 \cdot \frac{1 + \cos 8x}{2}$ . A rendezés után az

egyenletünk a következő alakúvá válik:  $\cos 6x = \frac{1}{3}$ . b)  $x_1 = k \cdot \frac{\pi}{2}$ ;  $x_2 = \frac{\pi}{8} + l \cdot \frac{\pi}{4}$ .

$\frac{1}{4} \cdot \sin 4x = \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot \sin 2x \cdot \cos 2x = \frac{1}{2} \cdot \sin 2x \cdot \cos 2x$ . Ezután rendezzük nullára az egyenletet,

majd alakítsuk szorzattá! c)  $x_1 = k \cdot \frac{\pi}{4}$ ;  $x_2 = \frac{\pi}{2} + l \cdot \pi$ ;  $x_3 = \frac{\pi}{6} + m \cdot 2 \cdot \pi$ ;

$x_4 = \frac{5 \cdot \pi}{6} + n \cdot 2 \cdot \pi$ . Használjuk fel, hogy  $\cos \alpha - \cos \beta = -2 \cdot \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$  és

## IV

$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \cdot \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$ . Majd rendezzük nullára az egyenletet és alakítsuk szorzattá! d)  $x_1 = \frac{\pi}{6} + k \cdot \pi$ ;  $x_2 = \frac{\pi}{3} + l \cdot \pi$ . Használjuk fel, hogy  $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$  és  $\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} \cdot (\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))$ . e)  $x_1 = \frac{\pi}{6} + k \cdot \pi$ ;  $x_2 = \frac{\pi}{3} + l \cdot \pi$ . Használjuk fel, hogy  $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$  és  $\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} \cdot (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$ .

**3330.** a)  $x_1 = \frac{\pi}{12} + k \cdot \frac{\pi}{2}$ ;  $x_2 = \frac{\pi}{3} + l \cdot \pi$ . Szorozzunk a nevezőkkel és hozzuk az egyenletet a következő alakúra:  $4 \cdot \sin 2x \cdot \cos x = \sqrt{3} \cdot \cos x + \sin x$ . Majd alkalmazzuk a  $\sin \alpha \cdot \cos \beta = (\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta))$  azonosságot! Rendezzük, majd pedig 2-vel osszuk el az egyenletet!

Kapjuk, hogy  $\sin 3x = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos x - \frac{1}{2} \cdot \sin x$ , ebből  $\sin 3x = \sin \left( \frac{\pi}{3} - x \right)$ . b)  $x_1 = \frac{\pi}{8} + k \cdot \frac{\pi}{4}$ ;  $x_2 = \frac{\pi}{3} + l \cdot \pi$ ;  $x_3 = -\frac{\pi}{3} + m \cdot \pi$ . Alkalmazzuk a  $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$  azonosságot háromszor, rendezés után kapjuk, hogy:  $\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x = 0$ . Alkalmazzuk most a  $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$  azonosságot, mégpedig a  $2x$ -es tagra és a  $6x$ -es tagra. Ezután szoroztá alakíthatjuk az egyenletet! c)  $x_1 = \frac{\pi}{6} + k \cdot \frac{\pi}{3}$ ;  $x_2 = \frac{\pi}{20} + l \cdot \frac{\pi}{10}$ ;  $x_3 = \frac{\pi}{2} + m \cdot \pi$ . Alkalmazzuk a  $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$  azonosságot négyszer! Ekkor kaphatjuk rendezés után, hogy:  $\cos 6x + \cos 8x + \cos 12x + \cos 14x = 0$ ;  $(\cos 12x + \cos 6x) + (\cos 14x + \cos 8x) = 0$ . Alkalmazzuk most a zárójeles összegekre a  $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$  azonosságot! Ezután szoroztá alakíthatjuk az egyenletet.

**3331.**  $x_1 = -\frac{7}{4}$ ;  $x_2 = \frac{1}{4}$ . Fogás:

$$\sqrt{2 - \operatorname{ctg}^2(2 \cdot \pi \cdot x)} \cdot \left( \frac{\sqrt{1 - \operatorname{ctg}^2(2 \cdot \pi \cdot x)}}{\sqrt{2 - \operatorname{ctg}^2(2 \cdot \pi \cdot x)}} \cdot \cos(\pi \cdot x) + \frac{1}{\sqrt{2 - \operatorname{ctg}^2(2 \cdot \pi \cdot x)}} \cdot \sin(\pi \cdot x) \right) = \sqrt{2}.$$

Ez azért lesz hasznos, mert:  $\left( \frac{\sqrt{1 - \operatorname{ctg}^2(2 \cdot \pi \cdot x)}}{\sqrt{2 - \operatorname{ctg}^2(2 \cdot \pi \cdot x)}} \right)^2 + \left( \frac{1}{\sqrt{2 - \operatorname{ctg}^2(2 \cdot \pi \cdot x)}} \right)^2 = 1$ .

Így van olyan  $\alpha$  szög, amelyre:  $\sin \alpha = \frac{\sqrt{1 - \operatorname{ctg}^2(2 \cdot \pi \cdot x)}}{\sqrt{2 - \operatorname{ctg}^2(2 \cdot \pi \cdot x)}}$  és  $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2 - \operatorname{ctg}^2(2 \cdot \pi \cdot x)}}$ .

Ezeket felhasználva kapjuk, hogy:

$$\sqrt{2 - \operatorname{ctg}^2(2 \cdot \pi \cdot x)} \cdot (\sin \alpha \cdot \cos(\pi \cdot x) + \cos \alpha \cdot \sin(\pi \cdot x)) = \sqrt{2},$$

$\sqrt{2 - \operatorname{ctg}^2(2 \cdot \pi \cdot x)} \cdot \sin(\pi \cdot x + \alpha) = \sqrt{2}$ . Másrészt  $\sqrt{2 - \operatorname{ctg}^2(2 \cdot \pi \cdot x)} \leq \sqrt{2}$  és  $\sin(\pi \cdot x + \alpha) \leq 1$ . Így az egyenlet akkor és csak akkor teljesülhet, ha mindkét előző egyenlőtlenségben egyenlőség áll elő. Elég vizsgálni a  $\sqrt{2 - \operatorname{ctg}^2(2 \cdot \pi \cdot x)} = \sqrt{2}$  egyenletet. Ezt megoldva, kapjuk, hogy  $x = \frac{1}{4} + \frac{k}{2}$ , ahol  $k$  tetszőleges egész szám. Az eredeti egyenlet gyökei ezek közül kerülhetnek ki. Ha a 4-gyel való oszthatóság szempontjából vizsgáljuk a  $k$  értékét és a négy esetet behelyettesítéssel kipróbáljuk az eredeti egyenletnél, akkor azt kapjuk, hogy pontosan akkor lesz megoldás, ha  $k = 4 \cdot m$ , ahol  $m$  tetszőleges egész szám. Tehát  $x = \frac{1}{4} + 2 \cdot m$  a megoldás, de ezek közül a feladat csak azokat kéri, amely a  $[-3; 1]$  intervallumba esnek. Ezek pedig  $m = 0$ -nál, illetve  $m = -1$ -nél vannak, azaz  $x = \frac{1}{4}$ , illetve  $x = -\frac{7}{4}$ .

### Paraméteres trigonometrikus egyenletek

**3332.**  $x = \frac{\pi}{2} \cdot k \cdot \pi$  az egyenlet azon megoldása, amely tetszőleges  $a$  valós szám esetén megoldása az egyenletnek. Ismert, hogy  $\cos 3x = 4 \cdot \cos^3 x - 3 \cdot \cos x$ , ezt helyettesítsük be az egyenletbe, majd rendezzük nullára és alakítsuk szorzattá!  $\cos x \cdot (4 \cdot \cos^2 x - 3 - a) = 0$ .

**1. eset:** ha  $\cos x = 0$ , ebből kapjuk, hogy  $x = \frac{\pi}{2} \cdot k \cdot \pi$  és ez tetszőleges a valós szám esetén megoldása az egyenletnek.

**2. eset:** ha  $4 \cdot \cos^2 x - 3 - a = 0$ , ebből  $\cos^2 x = \frac{3+a}{4}$ , ennek csak akkor van megoldása a valós számok halmazán, ha  $0 \leq \cos^2 x \leq 1$  miatt  $0 \leq \frac{3+a}{4} \leq 1$ , ebből pedig  $-3 \leq a \leq 1$ . Tehát a második eset nem áll fenn minden  $a$  valós számra.

**3333.**  $-1 \leq p < 3$  értékekre van az egyenletnek olyan megoldása, amelyre  $0 < x < \pi$ . Ismert, hogy  $\sin 3x = 3 \cdot \sin x - 4 \cdot \sin^3 x$ , ezt helyettesítsük be, majd rendezzük nullára az egyenletet és alakítsuk szorzattá! Kapjuk, hogy  $\sin x \cdot (3 - 4 \cdot \sin^2 x - p) = 0$ . **1. eset:**  $\sin x = 0$ , ebből  $x = k \cdot \pi$ , ez a feltétel miatt nem lehet, hiszen  $0 < x < \pi$ .

**2. eset:**  $3 - 4 \cdot \sin^2 x - p = 0$ , ebből  $\sin^2 x = \frac{3-p}{4}$ , és  $0 < x < \pi$  miatt  $0 < \sin^2 x \leq 1$ .

Így  $0 < \frac{3-p}{4} \leq 1$ , ebből  $-1 \leq p < 3$ .

**3334. 1. eset:** Ha  $a \neq -\frac{\pi}{2} + (n-m) \cdot \pi$ , ahol  $n$  és  $m$  tetszőleges egészek, akkor  $x_1 = k \cdot \pi$ ;  $x_2 = -a + n \cdot \pi$  a megoldások, ahol  $k$  tetszőleges egész szám.

**2. eset:** Ha  $a = -\frac{\pi}{2} + (n-m) \cdot \pi$ , akkor  $x = k \cdot \pi$  a megoldás.  $\cos x \cdot \cos(a+x) = \cos a$ ,

alkalmazzuk a  $\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} \cdot (\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))$  azonosságot.

$\frac{1}{2} \cdot (\cos(a+x-x) + \cos(a+x+x)) = \cos a$ , ebből  $\cos(2x+a) = \cos a$ . Ebből  $x = k \cdot \pi$ , illetve  $x = -a + n \cdot \pi$  következnek.  $\cos x \neq 0$ , ebből  $x \neq \frac{\pi}{2} + m \cdot \pi$ . Így  $k \cdot \pi \neq \frac{\pi}{2} + m \cdot \pi$ , ebből  $k \neq \frac{1}{2} + m$ , itt az egyenlőség nem is következhet be. Másrészt  $\frac{\pi}{2} + m \cdot \pi \neq -a + n \cdot \pi$ , ebből  $a \neq -\frac{\pi}{2} + (n-m) \cdot \pi$ .

## IV

**3335.**  $-1 \leq m \leq 1$  paraméterértékek mellett van megoldása az egyenletnek a valós számok halmazán. Használjuk fel  $\cos 2x$  képletét, ezután kapunk  $\cos x$ -re egy másodfokú egyenletet.

Oldjuk meg! Azt kapjuk, hogy **1. eset:**  $\cos x = \frac{3 \cdot m}{2}$ , ebből következik, hogy  $-\frac{2}{3} \leq m \leq \frac{2}{3}$ .

**2. eset:**  $\cos x = -m$ , ebből következik, hogy  $-1 \leq m \leq 1$ . A két eset egyenlőtlenségeinek egyesítése (uniója):  $-1 \leq m \leq 1$ .

**3336.**  $-4 \leq p \leq 2$  valós paraméter esetén van az egyenletnek valós megoldása. Tekintsük a  $\cos x$ -re másodfokú egyenletet! Ennek akkor és csak akkor van valós megoldása, ha a diszkriminán

nása nemnegatív. Ebből következik, hogy  $(1) \frac{9}{4} \geq p$ . Másrészt tekintsük a megoldóképletből kapott  $\cos x$  értékeket! Ezeknek a  $[-1; 1]$  intervallumba kell esni. Az egyik eset nem állhat fenn, a másik esetből  $(2) -4 \leq p \leq 2$  következik. Az  $(1)$  és  $(2)$  egyenlőtlenségnek egyaránt teljesülnie kell. Ez a közös rész pedig  $-4 \leq p \leq 2$ .

**3337.**  $-5 \leq p \leq 3$  paraméterértékek esetén van az egyenletnek valós megoldása. A  $\sin x$ -re másodfokú egyenletnek akkor és csak akkor van valós megoldása, ha a diszkriminán

nása nemnegatív. Ebből következik, hogy  $(1) p \leq 4$ . Másrészt az egyenlet gyökeinek a  $[-1; 1]$  intervallumba kell esniük. Az egyikből nem kapunk megoldást. Míg a másikkól kapjuk, hogy  $(2) -5 \leq p \leq 3$ . Az  $(1)$  és  $(2)$  egyenlőtlenség közös része:  $-5 \leq p \leq 3$ .

**3338.**  $\alpha_1 = -\frac{\pi}{4} + k \cdot 2 \cdot \pi$ ;  $\alpha_2 = \frac{5 \cdot \pi}{12} + m \cdot 6 \cdot \pi$  esetén lesz az egyenletnek két egyenlő

valós gyöke. Feltételek:  $\cos \alpha > 0$  és  $\sin \alpha \neq 0$ , ezekből  $-\frac{\pi}{2} + n \cdot 2 \cdot \pi < \alpha < 0 + 2 \cdot \pi$ ;

$0 + n \cdot 2 \cdot \pi < \alpha < \frac{\pi}{2} + n \cdot 2 \cdot \pi$ . Az egyenletnek akkor és csak akkor van két egyenlő gyöke, amikor a diszkriminán

nása nulla:  $\left(\frac{2}{\sqrt{\sin \alpha}}\right)^2 - 4 \cdot \left(\frac{1}{\sin \alpha} + 2 \cdot \sqrt{2}\right) = 0$ . Ennek a megoldásaiból

válogassuk ki azokat, amelyek eleget tesznek a feltételeknek.

**3339.** Pontosan egy valós megoldása akkor van az egyenletnek, ha  $c$  irracionális szám.  $x = 0$  megoldása az egyenletnek. Tehát azt kell megállapítanunk, hogy mely  $c$ -re nincs az egyenletnek nullától különböző megoldása. Mivel  $1 + \sin^2(cx) \geq 1$  és  $\cos x \leq 1$ , ezért az egyenlet akkor és

csak akkor teljesül, ha  $\sin^2(cx) = 0$  és  $\cos x = 1$ . Tehát  $x = \frac{k \cdot \pi}{c}$  és  $x = m \cdot 2 \cdot \pi$ . Ezekből

$\frac{k \cdot \pi}{c} = m \cdot 2 \cdot \pi$ , így  $c = \frac{k}{2 \cdot \pi}$ , azaz  $c$  racionális szám. Ha viszont  $c$  racionális szám, akkor van

az egyenletnek nem nulla megoldása. Legyen ugyanis  $c = \frac{p}{q}$ , ahol  $p$  és  $q$  egész számok, akkor mutassuk meg, hogy  $x = 2 \cdot q \cdot \pi$  kielégíti az egyenletet. Ezekből következik, hogy az egyenletnek akkor és csak akkor van 0-tól különböző megoldása a valós számok halmazán, ha  $c$  racionális szám. Tehát az egyenletnek egyetlen megoldása ( $x = 0$ ) akkor van, ha  $c$  irracionális szám.

**3340.**  $p \leq 0$  vagy  $p = 1$  vagy  $p \geq 3$  paraméter értékeknél lesz gyöke az egyenletnek a valós számok halmazán. Először tekintsük a  $p = 1$  esetet, erre azt kapjuk, hogy az egyenletnek minden valós szám megoldása. Ha  $p \neq 1$ , akkor oszthatjuk az egyenletet  $(p - 1)$ -gyel. Tekintsük a kapott másodfokú egyenlet diszkriminánsát, ez pedig pozitív lesz. Oldjuk meg az egyenletet,

kapjuk, hogy **1. eset:**  $\sin x = \frac{2}{p-1}$ ; **2. eset:**  $\sin x = -(p+1)$ . Valós gyök akkor van, ha ezek

közül legalább az egyik a  $[-1; 1]$  intervallumba esik. Oldjuk meg a két kettős egyenlőtlenséget!

**3341.**  $(0; 0)$  vagy  $(1; 0)$  azon számpárok, amelyekre az egyenlőség minden valós  $x$  számra teljesül. Először helyettesítsünk  $x = \pi$ -t, majd helyettesítsünk  $x = 2 \cdot \pi$ -t! A második kapott eredményből  $b = 0$  következik. Ezt visszahelyettesítve az előző eredménybe, kapjuk, hogy  $a = k$ , ahol  $k$  egész szám. Vegyük figyelembe, hogy a  $\cos(a \cdot \pi)$  a  $[-1; 1]$  intervallumba esik, ebből következtessünk arra, hogy  $a = 0$  vagy  $a = 1$ .

**3342.**  $\frac{-1 - \sqrt{10}}{2} \leq p \leq \frac{-1 + \sqrt{10}}{2}$  paraméterértékek esetén van valós megoldása az

egyenletnek. Alkalmazzuk a következő helyettesítést:  $p = p \cdot (\sin^2 x + \cos^2 x)$ . A nullára rendezés után osszuk el az egyenletet  $\cos x$ -szel, amikor ez nem nulla. Ekkor  $\operatorname{tg} x$ -re kapunk egy egyenletet. Ha  $p = 1$ , akkor van az egyenletnek valós megoldása. Ha  $p \neq 1$ , akkor  $\operatorname{tg} x$ -re másodfokú egyenletünk van. Ennek pontosan akkor van valós megoldása, ha a diszkriminánsa nemnegatív. Vizsgáljuk meg még azt az esetet, amikor  $\cos x = 0$ !

**3343.**  $-\sqrt{2} \leq p \leq \sqrt{2}$  paraméterértékekre van az egyenletnek valós megoldása.

A  $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$  helyettesítést végrehajtva, egy olyan egyenletet kapunk, amely  $\sin^2 x$ -re másodfokú. Ennek pontosan akkor van valós megoldása, ha a diszkriminánsa nemnegatív. Ebből kapjuk, hogy (1)  $-\sqrt{3} \leq p \leq \sqrt{3}$ . Oldjuk meg az egyenletet  $\sin^2 x$ -re! Használjuk fel, hogy  $0 \leq \sin^2 x \leq 1$ ! Az egyik gyök nem eshet ide, a másiktól viszont azt kapjuk, hogy (2)  $-\sqrt{2} \leq p \leq \sqrt{2}$ . Az (1) és (2) közös része a (2) egyenlőtlenség.

**3344.**  $x = -\frac{\pi}{4} + k \cdot \pi$  az egyenlet megoldása tetszőleges  $p$  valós paraméter esetén. Alakítsuk szorzattá még jobban az egyenlet jobb oldalát az  $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - a \cdot b + b^2)$  azonosság

segítségével. **1. eset:** Ha  $\sin x + \cos x = 0$ , akkor  $x_1 = -\frac{\pi}{4} + k \cdot \pi$ , minden  $p$  valós szám esetén.

**2. eset:** Ha  $\sin x + \cos x \neq 0$ , akkor  $0 = p \sin^2 x - (p+2) \cdot \sin x \cdot \cos x + p \cdot \cos^2 x$  alakra alakíthatjuk az egyenletet. **2. a) eset:** Ha  $\cos x \neq 0$ , akkor oszthatjuk az előző egyenletet  $\cos x$ -szel. Ekkor kapunk  $\operatorname{tg} x$ -re egyenletet, amelynek  $p = 0$  esetén is van megoldása és ha  $p \neq 0$ , akkor a kapott másodfokú egyenletnek pontosan akkor van valós megoldása, ha az egyenlet diszkriminánsa nemnegatív. Ebből következik, hogy  $-\frac{2}{3} \leq p \leq 2$  és  $p \neq 0$ . Tehát ebben az esetben nem minden valós  $p$ -re van megoldás. **2. b) eset:** Ha  $\cos x = 0$ , akkor az egyenletnek pontosan akkor van megoldása, ha  $p = 0$ .

**3345.**  $x_1 = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$ , tetszőleges  $p$  valós paraméter esetén,  $x_2 = \frac{\pi}{3 \cdot (p-1)} + l \cdot \frac{2 \cdot \pi}{p-1}$ , ha

$p \neq 1$ ,  $x_3 = -\frac{\pi}{3 \cdot (p-1)} + m \cdot \frac{2 \cdot \pi}{p-1}$ , ha  $p \neq 1$ . Használjuk fel a

$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$  azonosságot! Ennek a segítségével a következő alakra hozhatjuk az egyenletet:  $\cos x \cdot (2 \cdot \cos((p-1) \cdot x) - 1) = 0$ .